ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGUYỄN VĂN NGHĨA**

# KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI TÂM TỶ CỰ VÀ ỨNG DỤNG VÀO GIẢI TOÁN

**LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC**

**NGUYỄN VĂN NGHĨA**

# KỸ THUẬT BIẾN ĐỔI TÂM TỶ CỰ VÀ ỨNG DỤNG VÀO GIẢI TOÁN

## LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

**Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp**
**Mã số: 60 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
**PGS.TS. NGUYỄN VIỆT HẢI**

**THÁI NGUYÊN - 2017**

# Lời cảm ơn

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo bộ phận sau đại học, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K9B (2015 - 2017) Trường Đại Học Khoa Học - Đại Học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Để hoàn thành được luận văn một cách hoàn chỉnh, tôi luôn nhận được sự hướng dẫn và giúp đỡ nhiệt tình của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường Đại Học Hải Phòng. Tôi xin chân thành bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến thầy và xin gửi lời tri ân nhất của tôi đối với những điều thầy đã dành cho tôi.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành nhất tới gia đình, bạn bè, những người đã luôn động viên, hỗ trợ và tạo mọi điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Xin trân trọng cảm ơn!

*Hải Phòng, tháng 6 năm 2017*
*Người viết Luận văn*

*Nguyễn Văn Nghĩa*

# Danh mục hình

# Mục lục

# Mở đầu

## 1. Mục đích của đề tài luận văn

Khái niệm tâm tỷ cự đã được các nhà toán học đề cập đến từ lâu, chẳng hạn xem ([1], [5], [6]). Tuy nhiên việc ứng dụng khái niệm này còn rất hạn chế vì ngoài định nghĩa thông qua véc tơ, các tính chất và các biểu diễn khác của tâm tỷ cự chưa được nêu trong các tài liệu truyền thống. Mục đích của đề tài này là nghiên cứu đề xuất các tính chất đăc trưng của tâm tỷ cự từ đó đề ra các kỹ thuật biến đổi tâm tỷ cự để giải các loại toán hình học phẳng. Cụ thể là:

- Nghiên cứu các tính chất đặc trưng của tâm tỷ cự của hệ chất điểm. Đưa ra các kỹ thuật biến đổi tâm tỷ cự nhằm ứng dụng có hiệu quả vào việc giải toán Hình học.

- Ứng dụng các kỹ thuật biến đổi tâm tỷ cự vào giải các bài toán tính toán, chứng minh, tìm tập hợp điểm và các vấn đề khác nhằm khắc sâu phương pháp giải các bài toán liên quan đến tâm tỷ cự.

- Các kiến thức được nâng cao: Xây dựng một lý thuyết chặt chẽ và có hệ thống về tâm tỷ cự, các kỹ thuật biến đổi tâm tỷ cự, tính chất mô men quán tính,. . . dựa vào khái niệm véc tơ. Bổ sung thêm một phương pháp hiệu quả khi giải các bài toán hình học sơ cấp. Đặc biệt áp dụng được vào việc giải các bài toán thi olympic Quốc gia và Quốc tế. Có thể nói đây một sáng tạo mới để giải các bài toán hình học, một phương pháp giải toán có hiệu quả.

## 2. Nội dung của đề tài, những vấn đề cần giải quyết

Đề tài sẽ giải quyết các vấn đề sau: Hệ thống, chứng minh các tính chất của tâm tỷ cự, trình bày các kỹ thuật biến đổi tâm tỷ cự để ứng dụng vào giải các bài toán hình học có liên quan. Nêu ra được các bài toán mẫu, điển hình minh họa cho các kỹ thuật biến đổi, giải được các bài toán khó, thể hiện được tính hơn hẳn so với cách giải thông thường. Nội dung chia làm 3 chương:

**Chương 1. Tâm tỷ cự của hệ chất điểm**

Định nghĩa và nêu các tính chất của tâm tỷ cự chủ yếu là trên mặt phẳng, các kiến thức cần thiết để xây dựng một số kỹ thuật biến đổi tâm tỷ cự, chuẩn bị cho chương hai. Các tính chất được xây dựng và chứng minh chặt chẽ, đầy đủ. Chương 1 gồm 4 mục sau.

1.1. Định nghĩa và ký hiệu.

1.2. Các tính chất cơ bản của tâm tỷ cự.

1.3. Các ví dụ mở đầu.

1.4. Công thức Lagrang và công thức Jacobi.

**Chương 2. Các kỹ thuật biến đổi tâm tỷ cự và ứng dụng**

Lần lượt trình bày các kỹ thuật biến đổi dựa vào các tính chất của tâm tỷ cự trên mặt phẳng. Mỗi kỹ thuật được nêu thành các bước vận dụng, các ví dụ và các bài toán mẫu. Hình thành các kỹ năng " chọn tâm tỷ cự, biến đổi tâm tỷ cự, coi diện tích là tọa độ tâm tỷ cự,. . . " để giải các loại toán hình học phẳng: chứng minh, tính toán, tìm quỹ tích,. . . Chương 2 trình bày 4 mục sau:

2.1. Kỹ thuật chọn tâm tỷ cự.

2.2. Kỹ thuật diện tích hóa.

2.3. Kỹ thuật giao hoán và kết hợp.

2.4. Kỹ thuật quán tính.

**Chương 3. Các vấn đề liên quan**

Trình bày các bài toán liên quan đến tâm tỷ cự ở mức độ khó hơn, gồm hai nội dung:

3.1. Chứng minh một số định lý nổi tiếng của hình học sơ cấp.

3.2. Một số bài toán thi học sinh giỏi và thi Olympic.

- Mặc dù đã rất cố gắng nhưng luận văn không tránh khỏi những hạn chế, khiếm khuyết. Tác giả rất mong sự góp ý, bổ sung của các đồng nghiệp và các thầy cô giáo nhằm làm cho kết quả nghiên cứu hoàn chỉnh và có ích hơn. Xin chân thành cảm ơn.

*Tác giả.*

# Chương 1

# Tâm tỷ cự của hệ chất điểm

Các khái niệm ở đây được xét trong mặt phẳng hoặc trong không gian. Thuật ngữ *"barycentric"* được nhiều tác giả dịch là "tâm tỷ cự" hoặc "khối tâm",... Thực ra sử dụng các từ này chỉ đúng nghĩa một phần bởi *"barycentric"* chỉ liên quan đến đoạn thẳng và các khái niệm quen thuộc trong cơ học. Đến nay *"barycentric"* đã được toán học hóa dựa vào khái niệm không gian véc tơ thì các cách Việt hóa như trên có những hạn chế nhất định. Trong luận văn này chúng tôi vẫn sử dụng chữ "tâm tỷ cự" do tính chất lịch sử của khái niệm và phù hợp với các tài liệu hiện hành (xem [1]). Các ký hiệu cũng được tham khảo và vận dụng vào việc trình bày cho thuận tiện nhất.

## 1.1 Hệ chất điểm và tâm tỷ cự

**Mệnh đề 1.1.** Cho hai điểm $\mathrm{A}, \mathrm{B}$ và hai số thực $m_1, m_2$ không đồng thời bằng 0. Khi đó

i. Nếu $m_1 + m_2 = 0$ thì không có Z sao cho $m_1\overrightarrow{\mathrm{ZA}} + m_2\overrightarrow{\mathrm{ZB}} = \vec{0}$.

ii. Nếu $m_1 + m_2 \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm Z sao cho

$$m_1\overrightarrow{\mathrm{ZA}} + m_2\overrightarrow{\mathrm{ZB}} = \vec{0}.$$

Khi Z thỏa mãn đẳng thức trên thì với mọi điểm O ta luôn có:

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \frac{m_1\overrightarrow{\mathrm{OA}} + m_2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m_1 + m_2}.$$

*Chứng minh.*
i. Ta có $m_1\overrightarrow{ZA}+m_2\overrightarrow{ZB}=\vec{0} \Longleftrightarrow m_1\overrightarrow{ZA}+m_2(\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{AB})=\vec{0} \Longleftrightarrow (m_1+m_2)\overrightarrow{ZA}+m_2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. Nếu $m_1+m_2=0$ thì không có Z.
ii. Nếu $m_1+m_2\neq 0$ thì đẳng thức trên là $\overrightarrow{AZ}=\dfrac{m_2}{(m_1+m_2)}\overrightarrow{AB}$, chứng tỏ Z xác định và duy nhất.

Với O tùy ý, xen điểm Z vào $m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}$ ta có:
$m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}=m_1(\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{ZA})+m_2(\overrightarrow{OZ}+\overrightarrow{ZB})$
$=(m_1+m_2)\overrightarrow{OZ}+(m_1\overrightarrow{ZA}+m_2\overrightarrow{ZB})=(m_1+m_2)\overrightarrow{OZ}$. □

**Mệnh đề 1.2.** *Cho ba điểm* A, B, C *và ba số thực* $m_1, m_2, m_3$ *không đồng thời bằng* O. *Khi đó,*

*i. Nếu* $m_1+m_2+m_3=0$ *thì không có* Z *sao cho*

$$m_1\overrightarrow{ZA}+m_2\overrightarrow{ZB}+m_3\overrightarrow{ZC}=\vec{0}.$$

*ii. Nếu* $m_1+m_2+m_3\neq 0$ *thì tồn tại duy nhất điểm* Z *sao cho*

$$m_1\overrightarrow{ZA}+m_2\overrightarrow{ZB}+m_3\overrightarrow{ZC}=\vec{0}$$

*Khi* Z *thỏa mãn đẳng thức trên thì với mọi điểm* O *ta luôn có:*

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{m_1\overrightarrow{OA}+m_2\overrightarrow{OB}+m_3\overrightarrow{ZC}}{m_1+m_2+m_3}. \tag{1.1}$$

*Chứng minh.* Chứng minh tương tự mệnh đề 1.1. □

**Nhận xét 1.1.**
*Trong trường hợp* $m_1=m_2=m_3\neq 0$ *thì đẵng thức (1.1) trở thành* $\overrightarrow{ZA}+\overrightarrow{ZB}+\overrightarrow{ZC}=\vec{0} \Longleftrightarrow \mathrm{Z}\equiv\mathrm{G}-$ *trọng tâm tam giác* ABC.

**Mệnh đề 1.3.** *Cho n điểm* $\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, .., \mathrm{A_n}$ *và n số thực* $m_1, m_2, ..., m_n$ *không đồng thời bằng* O . *Khi đó*

*i. Nếu* $m_1+m_2+...+m_n=0$ *thì không có* Z *sao cho*

$$m_1\overrightarrow{ZA_1}+m_2\overrightarrow{ZA_2}+...+m_n\overrightarrow{ZA_n}=\vec{0}.$$